

سیستم گسسته

۱-۴ دسته بندی سیستمها

۱- سیستم آنالوگ و گسسته

سیستم آنالوگ: در سیستم آنالوگ ورودی و خروجی های و عملکرد سیستم روی آنها پیوسته است $y=f(x)$

سیستم گسسته: در سیستم گسسته ورودی سیستم، گسسته است و به تبع آن خروجی و عملکرد سیستم نیز گسسته می گردد.

سیستم گسسته را می توان به صورت $y(n)=f(x(n))$ نشان داد.

مثال: سیستم تاخیر دهنده $y(n)=x(n-n_0) \quad -\infty < n < \infty$

۲- سیستم استاتیک (بی حافظه) و دینامیک

استاتیکی: سیستمی است که فقط به ورودی n پاسخ می دهد.

$$y(n)=x^2(n)$$

$$y(n)=nx(n)+bx^3(n)$$

دینامیکی: سیستم دینامیکی سیستمی است که به گذشته ورودی و خروجی نیز جواب می دهد.

$$y(n)=x(n)+3x(n-1n)$$

دارای یک حافظه

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)$$

بینهایت حافظه

$$y(x) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k_0-M_1}^{M_2} x(n-k)$$

حافظه $1+M_1+M_2$

$$y(n) = \sum_{k=1}^{10} a_k y(n-k) + \sum_{j=1}^2 b_j x(n-j)$$

۱۲ حافظه

۳- سیستم خطی و غیر خطی

سیستم خطی سیستمی است که شرط $f[ax_1+bx_2]=af(x_1)+bf(x_2)$ در آن صدق کند.

$$y(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (ax_1(n)+bx_2(n)) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) + b \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) = a f(x_1) + b f(x_2)$$

سیستمی خطی و

$$y(n) = x(n)^2 \Rightarrow (ax_1(n)+bx_2(n))^2 = a^2 x_1^2(n) + b^2 x_2^2(n) + 2abx_1(n)x_2(n) \neq a^2 x_1^2(n) + b^2 x_2^2(n)$$

(غیرخطی است)

۴- سیستم مستقل زمانی (Time(shift) invariant

سیستم مستقل زمانی سیستمی است که در حال آرامش، با تاخیر در ورودی در خروجی هم به همان ترتیب تاخیر پیدا کند.

$$\begin{aligned} \text{اگر } y(n) &= f(x(n)) \Rightarrow \\ \text{آنگاه } y(n, k) &= f(x(n-k)) \stackrel{?}{=} y(n-k) \end{aligned}$$

مثال

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \Rightarrow \begin{cases} y(n-k) = x(n-k) - x(n-k-1) \\ y(n, k) = f(x(n-k)) = x(n-k) - x(n-k-1) = y(n-k) \end{cases}$$

پس سیستم مستقل زمانی است.

$$y(n) = x(Mn) \Rightarrow \begin{cases} y(n-k) = x(Mn-Mk) \\ y(n, k) = f(x(n-k)) = x(Mn-k) \neq y(n-k) \end{cases}$$

وابسته به زمان است

$$y(n) = nx(n) \Rightarrow \begin{cases} y(n-k) = (n-k)x(n-k) \\ y(n, k) = f(x(n-k)) = nx(n-k) \neq y(n-k) \end{cases} \quad \text{وابسته به زمان است}$$

(۵) سیستم علی causal

سیستمی است که به ازای هر $n=n_0$ سیستم فقط به ورودیهای $x(n)$ برای $n \leq 0$ وابسته باشد. به عبارت دیگر این سیستم به آیند ورودی پاسخ نمی دهد.

مثال: سیستم تفاضلی رو به جلو $y(n) = x(n+1) - x(n)$ غیر علی است

ولی سیستم تفاضلی رو به عقب $y(n) = x(n) - x(n-1)$ علی است.

(۶) سیستم پایدار و ناپایدار:

سیستم به عبارت *BIBO* (ورودی محدود - خروجی محدود) پایدار است اگر به ازای تمام ورودیهای محدود، خروجیهای محدود داشته باشد. ورودی $x(n)$ محدود است اگر بتوان نوشت $|x(n)| \leq B_x < \infty$ برای تمام n ، خروجی محدود $|y(n)| \leq M < \infty$ بدست آید. این شرط لازم و کافی است.

(۷) سیستم غیر فعال passive

سیستمی که به ازای هر دنباله انرژی با ورودی محدود، دنباله خروجی، انرژی کمتری داشته باشد سیستم غیر فعال و اگر برابر باشد سیستم بدون تلفات *lossless* است.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

۲-۴ سیستم خطی مستقل زمانی (LTI) Linear Time Invariant

برای این سیستم از ۳ نوع مدل ریاضی می توان استفاده کرد که رابطه خروجی - ورودی سیستم را مشخص می کند این ۳ مدل عبارتند از:

- ۱- معادلات تفاضلی
 - ۲- تابع تبدیل Z
 - ۳- معادلات فضای حالت
- سیستم LTI را می توان با معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت نوشت.

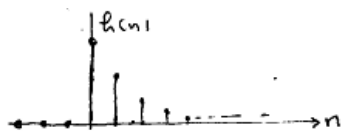
$$y(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y(n-i) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x(n-j)$$

پاسخ سیستم LTI را به ضربه می توان اینگونه محاسبه کرد.

$$\delta(n) \xrightarrow{LTI} h(n), \quad h(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h(n-i) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \delta(n-j)$$

مثال: پاسخ ضربه سیستم $y(n) = 0.6y(n-1) + x(n)$ را بدست آورید شرایط اولیه را صفر در نظر بگیرید.

$$h(n) = 0.6h(n-1) + \delta(n)$$



n	0	1	2	...	n
$h(n)$	1	0.6	0.36	...	0.6^n

$\Rightarrow h(n) = 0.6^n$

۲) پاسخ سیستم به ورودی اختیاری $x(n)$ را می توان به شرح ذیل محاسبه کرد

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k) \Rightarrow y(n) = f\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)\right]$$

از آنجائیکه $h(n) = f[\delta(n)]$ و سیستم خطی است، از رابطه جمع اثرها بدست می آید.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

به این رابطه ، جمع کانولوشن می گویند. و آنرا با علامت نشان می دهند. کانولوشن اپراتوری خطی جابجائی پذیر ، اتحاد پذیر و توزیع پذیر است.

$$y(n) = x(n) \otimes h(n)$$

$$x(n) \otimes h(n) = h(n) \otimes x(n)$$

$$[x(n) \otimes h(n)] \otimes p(n) = x(n) \otimes [h(n) \otimes p(n)]$$

$$[x(n) + h(n)] \otimes p(n) = x(n) \otimes p(n) + h(n) \otimes p(n)$$

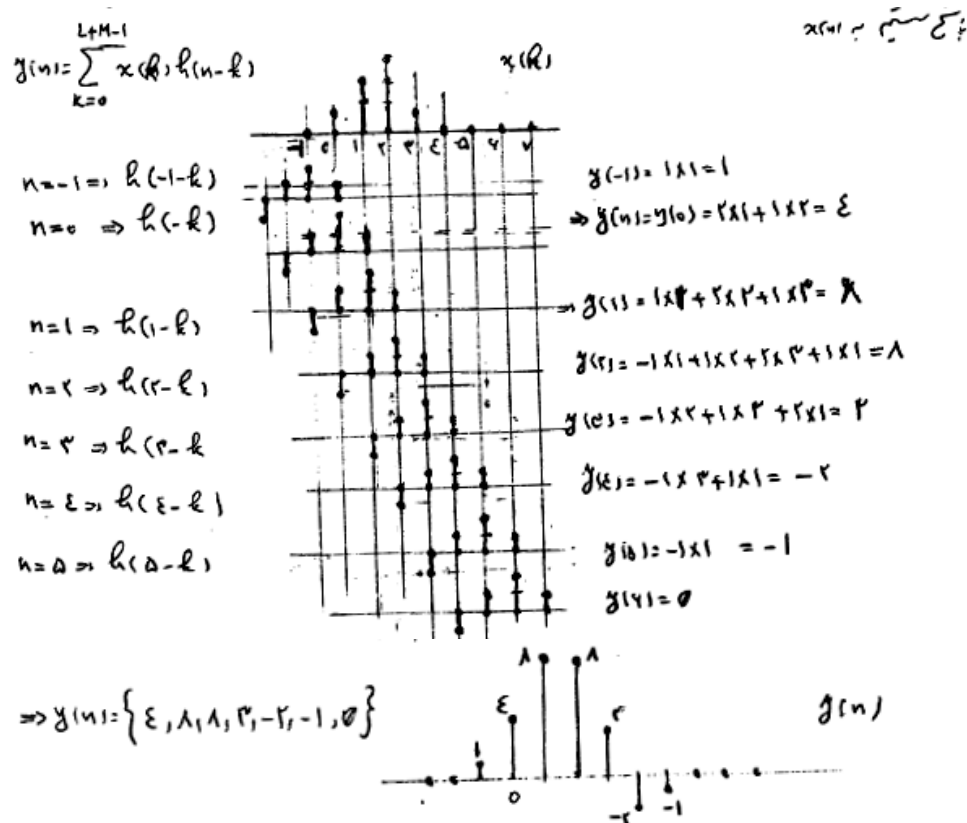
این رابطه مبنای کار فیلتر کردن سیستمها است. اگر طول h و N طول x باشد طول y برابر $L+M-1$ می گردد.

مثال: پاسخ ضربه سیستم FIR ذیل و پاسخ آن به سیگنال $x(n) = \delta(n-3) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$ را بدست آورید.

$$y(n) = x(n+1) + 2x(n) + x(n-1) - x(n-2)$$

جواب:

$$x(n) = \delta(n) \Rightarrow h(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-2)$$

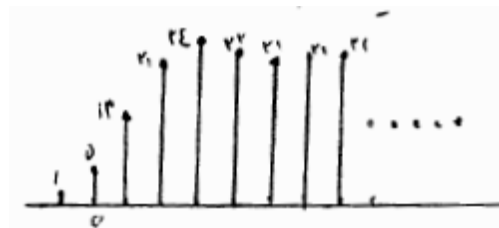


(۳) پاسخ پله سیستم را بدست آورید.

$$x(n) = u(n) \Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) \Rightarrow \begin{cases} s(n) = s(n-1) + h(n) \\ h(n) = s(n) - s(n-1) \end{cases}$$

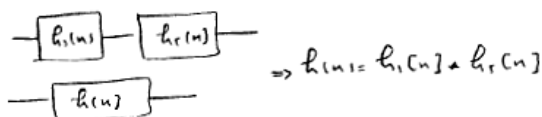
مثال: پاسخ پله مثال قبل را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
 n=-1 &\Rightarrow s(-1) = h(-1) = 1 \\
 n=0 &\Rightarrow s(0) = s(-1) + h(0) = 0 \\
 s(1) &= 0 + 1 = 1 \\
 s(2) &= 1 + 1 = 2 \\
 s(3) &= 2 + 1 = 3 \\
 s(4) &= 3 + 1 = 4 \\
 s(5) &= 4 + 1 = 5
 \end{aligned}$$

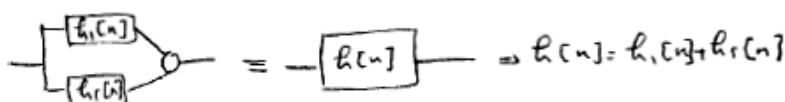


۴.۲.۱ خواص سیستم LTI

(۱) اتصال سری: اگر دو سیستم با یکدیگر سری قرار گیرند تابع ضربه سیستم مجموع برابر کانولوشن تابع ضربه آنهاست.



(۲) اتصال موازی:



(۲) شرط پایداری سیستم گسسته LTI

شرط پایداری BIBO سیستم این بود که به ازای هر ورودی محدود خروجی محدود تولید کند. به این ترتیب اگر $|x(n)| \leq M < \infty$ باشد،

$|y(n)| < N < \infty$ حال می نویسیم

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \Rightarrow |y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \right|$$

$$\Rightarrow |y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

به این ترتیب سیستمی پایدار است که $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ باشد (مجموع قدر مطلق تابع ضربه محدود)
مثال: محدوده ی a برای پایداری $h(n) = a^n u(n)$ را تعیین کنید.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \dots$$

این دنباله به $\frac{1}{1-|a|}$ همگرا می شود اگر $|a| < 1$ باشد. سیستم به صورت $BIBO$ پایدار است.

۳) شرط علی در سیستم گسسته LTI

مقدار خروجی سیستم در $n=n_0$ برابر است با

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x(n_0 - k) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x(n_0 - k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] x(n_0 - k)$$

در جمله اول سمت راست مقادیر حال و گذشته $x(n)$ وجود دارد ولی در جمله دوم به آینده سیگنال $x(n)$ ارتباط دارد. برای اینکه سیستم علی باشد لازم است جمله دوم صفر گردد، به این معنی که برای $n < 0$ مقدار $h(n) = 0$ باشد.

به این ترتیب در یک سیستم علی حد جمع کانولوشن بجای $-\infty$ از صفر آغاز می گردد.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k]$$

در هر پردازش سیگنال واقعی لازم است سیستم علی باشد چرا که به آینده سیگنال ورودی دسترسی وجود ندارد. در سیستم LTI وقتی به ازای $n < 0$ مقدار $h(n)$ صفر باشد. سیستم علی و در غیر این صورت غیر علی گفته می شود. اگر ورودی $x(n)$ به ازای $n < 0$ موجود نباشد می نویسیم.

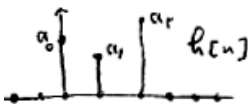
$$y(n) = \sum_{k=0}^n h[k] x[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k] h[n-k]$$

۴- a سیستم با پاسخ ضربه و نامحدود: سیستمی که پاسخ ضربه آن جملات محدود دارند را $Finite Impulse Response (FIR)$ می گویند. مثل سیستم

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2]$$

که تابع ضربه آن فقط ۳ جمله دارد

$$h[n] = a_0 \delta[n] + a_1 \delta[n-1] + a_2 \delta[n-2] = \sum_{k=0}^2 a_k \delta[n-k]$$



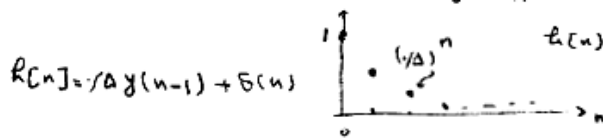
برای این سیستمها جمع کانولوشن بصورت

$$y[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} h[k] x[n-k]$$

تغییر می کند که برای سیستم مثال

$$y(n) = \sum_{k=0}^2 h(k) x(n-k)$$

۴- b) سیستم با پاسخ ضربه نامحدود (Infinite Impulse response) در این سیستم پاسخ ضربه طول محدود ندارد. مثل سیستم $y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$ که پاسخ ضربه آن



۵) سیستم ریکرسیو و غیر ریکرسیو recursive-nonrecursive

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$$

سیستمی که در آن خروجی فقط به ورودی بستگی دارد سیستم غیر ریکرسیو و سیستمی که در آن خروجی به ورودی و خروجی بستگی دارد سیستم ریکرسیو خوانده می شود.

$$y(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y(n-i) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x(n-j)$$

مثال: سیستم جذر گیر برای \sqrt{A}

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2} \left[y(n-1) + \frac{A}{y(n-1)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2(n-1) + A}{y(n-1)} \right] \\ \sqrt{A} & \Rightarrow A=5 \Rightarrow y(n) = \left\{ 2, \frac{5}{2}, 2.125, 2.0625, 2.03125, 2.015625, \dots \right\} \Rightarrow \sqrt{5} = 2.236 \end{aligned}$$

۶) سیستم گسسته حقیقی و کمپلکس

سیستم گسسته حقیقی پاسخ ضربه حقیقی و ضرایب معادله دیفرنس نیز حقیقی است در مقابل سیستم گسسته کمپلکس دارای پاسخ ضربه و ضرایب معادله دیفرنس کمپلکس است.

۱-۲-۴ حل معادلات تفاضلی

حل معادلات تفاضلی مشابه حل معادلات دیفرانسیل است جواب از دو بخش عمومی و خصوصی تشکیل می گردد. جواب عمومی با صفر قرار دادن ورودی بدست می آید و جواب خصوصی پاسخ سیستم به تحریک ورودی است. معادله دیفرنس مقابل را در نظر بگیرید.

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

جواب معادله بصورت $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$ است که در آن $y_h(n)$ جواب عمومی و $y_p(n)$ جواب خصوصی است.

a) جواب عمومی: جواب عمومی معادله دیفرنس به صورت $y_h(n) = \lambda^n$ است که در معادله با ورودی صفر صدق می کند.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \alpha_k \lambda^{n-k} &= 0 \Rightarrow \lambda^{n-N} (\alpha_0 \lambda^N + \alpha_1 \lambda^{N-1} + \dots + \alpha_N) = 0 \Rightarrow \\ \alpha_0 \lambda^N + \alpha_1 \lambda^{N-1} + \dots + \alpha_N &= 0 \end{aligned}$$

معادله مشخصه سیستم دارای N جواب است. که البته می تواند ریشه های تکراری نیز داشته باشد اگر فرض کنیم $N-L$ ریشه و L ریشه تکراری داشته باشد جواب عمومی بصورت زیر نوشته می شود.

$$y_h(n) = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n + \dots + A_{N-L} \lambda_{N-L}^n + \sum_{i=1}^{L-1} A_{N-L+i} n^i \lambda_i^n$$

b) جواب خصوصی: اگر ورودی $x(n) = R(n)$ باشد مشابه آن باید در معادله صدق کند. جواب خصوصی برای تعدادی از ورودیها در جدول ذیل ارائه شده است.

Input Signal, $x(n]$	Particular Solution, $y_p(n]$
A (constant)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \dots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n (K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \dots + K_M)$
$\begin{Bmatrix} A \cos \omega_0 n \\ A \sin \omega_0 n \end{Bmatrix}$	$K_1 \cos \omega_0 n + K_2 \sin \omega_0 n$

از قرار دادن $yp(n)$ به همراه $x(n)$ در معادله دیفرنس وقتی شرایط اولیه صفر باشد ضرایب k بدست می آیند.

(c) جواب کلی معادله

$$g(n) = g_h(n) + g_p(n) = \sum_{\lambda=1}^M A_i \lambda_i^n + g_p(n)$$

ولتای M پارامتری مجهول است که باید با توجه به شرایط اولیه محاسبه شوند این کار در دو مرحله انجام می شود.

۱- پاسخ سیستم به شرایط اولیه $yzi(n)$: در این حالت ورودی صفر می گردد و با توجه به معادله دیفرنس جواب عمومی و شرایط اولیه ضرایب تعیین می گردد که پاسخ $yzi(n)$ را می سازد.

۲- پاسخ سیستم به ورودی بدون شرایط اولیه $yzs(n)$: در این حالت شرایط اولیه صفر در نظر گرفته می شود و با توجه به معادله دیفرنس و جواب کلی $yzs(n)$ محاسبه می شود.

پاسخ نهائی معادله $y(n) = yzi(n) + yzs(n)$ می باشد.

مثال ۱: پاسخ پله سیستم مقابل را بدست آورید.

$$g(n) + g(n-1) - 2g(n-2) = x(n)$$

$$g(-2) = -1, \quad g(-1) = 1, \quad x(n) = \lambda u(n)$$

$$\text{معادله مشخصه } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 \Rightarrow g_h(n) = A_1(-2)^n + A_2(2)^n$$

$$x(n) = \lambda u(n) \Rightarrow g_p(n) = \beta u(n) \Rightarrow$$

$$\beta u(n) + \beta u(n-1) - 2\beta u(n-2) = \lambda u(n)$$

$$\text{برای } n \geq 2 \Rightarrow \beta + \beta - 2\beta = \lambda \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow g_p(n) = -1 u(n)$$

$$\Rightarrow g_h(n) = A_1(-2)^n + A_2(2)^n - 1 u(n)$$

محاسبه ی پارامترهای جواب نهائی: (۱) $yzi \Rightarrow x(0) = 0$

$$\begin{cases} g(0) = -g(-1) + 2g(-2) = -7 = g_h(0) = A_1 + A_2 \\ g(1) = -g(0) + 2g(-1) = 13 = g_h(1) = -2A_1 + 2A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -5.5 \\ A_2 = 1.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_{zi}(n) = -5.5(-2)^n - 1.5(2)^n$$

(۲) شرایط اولیه صفر: yzs

$$\begin{cases} g(0) = -g(-1) + 2g(-2) + \lambda = \lambda = g(0) = A_1 + A_2 - 1 \\ g(1) = -g(0) + 2g(-1) + \lambda = 0 = g(1) = -2A_1 + 2A_2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0.5 \\ A_2 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow g_{zs}(n) = 0.5(-2)^n + 0.5(2)^n - 1$$

$$\Rightarrow g(n) = g_{zs}(n) + g_{zi}(n) = -1.5(-2)^n + 1.5(2)^n - 2 \quad n \geq 0$$

تعیین ضرایب در یک مرحله (وقتی ورودی به شکل $x(n)u(n)$ باشد)

$$g(0) = -g(-1) + 2g(-2) + 1 = A_1(-1)^0 + A_2(2)^0 - 2 = A_1 + A_2 - 2 = -1 - 2 + 1 = -1$$

$$g(1) = -g(0) + 2g(-1) + 1 = A_1(-1)^1 + A_2(2)^1 - 2 = -A_1 + 2A_2 - 2 = -3A_1 + 2A_2 - 2 = 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ -3A_1 + 2A_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow g(n) = -1/8(-1)^n + 5/8(2)^n - 2 \quad n \geq 0$$

وقتی ورودی حالت فوق را نداشته باشد مانند $u(n-1)$ از روش فوق نمی توان استفاده کرد.

اگر ورودی $x(n)u(n)$ باشد و $x(n) = \delta(n)$ نباشد از روش ذیل نیز می توان استفاده کرد.

$$\begin{aligned} g(-1) &= +1 = A_1(-1)^{-1} + A_2(2)^{-1} - 2 \Rightarrow \begin{cases} -A_1/2 + A_2/2 = 3 \\ A_1/4 + A_2/4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 8/3 \\ A_1 = -1/3 \end{cases} \\ g(-2) &= -1 = A_1(-1)^{-2} + A_2(2)^{-2} - 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

مثال ۲: پاسخ سیستم مثال ۱ را به ورودی $2^n u(n)$ بدست آورید.

$$y(n) + y(n-1) - 6y(n-2) = 2^n u(n)$$

از مثال قبل داریم

$$g_h(n) = A_1(-1)^n + A_2(2)^n$$

از آنجائیکه ورودی مشابه یکی از مدهای سیستم است، جواب خصوصی بصورت $yp(n) = \beta n * 2^n$ نوشته می شود.

$$n\beta 2^n + \beta n 2^{n-1} - 6\beta n 2^{n-2} = 2^n \Rightarrow \beta = 0.4$$

$$\Rightarrow g(n) = A_1(-1)^n + A_2(2)^n + 0.4n(2)^n$$

از آنجائیکه ورودی برای $n > 0$ غیر صفر است می نویسیم:

$$\begin{aligned} g(0) &= -g(-1) + 2g(-2) + 2 = A_1 + A_2 = -2 \\ g(1) &= -g(0) + 2g(-1) + 2 = -3A_1 + 2A_2 + 0.4 \times 2 = 14 \\ \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = -2 \\ -3A_1 + 2A_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -5/0.4 \\ A_2 = -0.94 \end{cases} \Rightarrow g(n) = -5/0.4(-1)^n - 0.94(2)^n + 0.4n(2)^n \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۳: پاسخ ضربه و پله سیستم $y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + x(n-1)$ تحت شرایط اولیه صفر را بدست آورید.

جواب:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4 \Rightarrow g_h(n) = A_1(-1)^n + A_2(4)^n$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 3g(-1) + 4g(-2) + 5(0) = A_1 + A_2 = 1 \\ g(1) &= 3g(0) + 4g(-1) - 7A_1 + 4A_2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{5}{8} \\ A_1 = \frac{3}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_1(n) = \frac{3}{8}(-1)^n + \frac{5}{8}(4)^n$$

سپس از قاعده جمع آثار جواب نهایی بدست می آید.

$$\begin{aligned} g(n) &= g_1(n) + g_2(n-1) = \left(\frac{3}{8}(-1)^n + \frac{5}{8}(4)^n \right) + \left(\frac{3}{8}(-1)^{n-1} + \frac{5}{8}(4)^{n-1} \right) u(n-1) \\ \Rightarrow n=0 &\Rightarrow g(n)=1 \\ n \geq 1 &\Rightarrow g(n) = -\frac{3}{8}(-1)^n + \frac{5}{8}(4)^n \Rightarrow g(n) = -\frac{3}{8}(-1)^n + \frac{5}{8}(4)^n \end{aligned}$$

پاسخ پله سیستم

$$\Rightarrow \beta u(n) - \gamma \mu(n-1) - \epsilon \beta \mu(n-2) = \mu(n)$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4} \Rightarrow g_p(n) = -\frac{1}{4} \mu(n)$$

$$\Rightarrow g_1(n) = A_1(-1)^n + A_2(\epsilon)^n - \frac{1}{4} \mu(n)$$

از آنجا نیکه شرایط اولیه صفر منظور شده است

$$g(0) = \mu(0) = 1 = A_1 + A_2 - \frac{1}{4}$$

$$g(1) = \epsilon g(0) + \mu(1) = \epsilon = -A_1 + \epsilon A_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0.12 \\ A_2 = \frac{12}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_1(n) = 0.1(-1)^n + \frac{12}{10}(\epsilon)^n - \frac{1}{4} \mu(n)$$

$$\Rightarrow g(n) = g_1(n) + \gamma g_1(n-1) \Rightarrow n=0 \Rightarrow g(n) = 0.1 + \frac{12}{10} - \frac{1}{4}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow g(n) = -0.1(-1)^n + \frac{12}{10}(\epsilon)^n - \frac{1}{4}$$

مثال ۴: پاسخ سیستم $y(n) - 2y(n-1) = nx(n)$ را تحت شرایط اولیه $y(-1) = 1$ بدست آورید.

$$\Rightarrow \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow g_h(n) = A(2)^n$$

$$\Rightarrow g_p(n) = d + \beta n \Rightarrow d + \beta n - 2(d + \beta(n-1)) = n \Rightarrow \begin{cases} d = -2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(n) = A(2)^n - 2 - n \Rightarrow g(0) = 2g(-1) + 0 = A - 2 - 0 = 2 = A - 2 \Rightarrow A = 4$$

$$\Rightarrow g(n) = 4(2)^n - 2 - n$$

مثال ۵: پاسخ سیستم $y(n] - y(n-1) + 0.5y(n-2) = u(n)$ تحت شرایط اولیه $y(-2) = 0$ و $y(-1) = 1$ را بدست آورید.

$$g(n) - g(n-1) + \frac{1}{2}g(n-2) = u(n)$$

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2} = \alpha e^{\pm j\frac{\pi}{6}} = 0.5 e^{\pm j\frac{\pi}{6}}$$

$$g_{ex}(n) = A_1(\alpha e^{j\frac{\pi}{6}})^n + A_2(\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}})^n \Rightarrow g(0) = 1 = A_1 + A_2$$

$$\Rightarrow A_2 = 1 - A_1 \Rightarrow \frac{1}{2} = A_1 \alpha e^{j\frac{\pi}{6}} + (1 - A_1) \alpha e^{-j\frac{\pi}{6}} \Rightarrow A_1 = \frac{\frac{1}{2} - \alpha e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\alpha e^{j\frac{\pi}{6}} - \alpha e^{-j\frac{\pi}{6}}}, A_2 = A_1 = \frac{\frac{1}{2} - \alpha e^{j\frac{\pi}{6}}}{\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}} - \alpha e^{j\frac{\pi}{6}}}$$

$$g(n) - g(n-1) + \frac{1}{2}g(n-2) = \mu(n)$$

$$\Rightarrow g(n) = A_p(\alpha e^{j\frac{\pi}{6}})^n + A_d(\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}})^n + \frac{1}{2} \Rightarrow g(0) = 1 = A_p + A_d + \frac{1}{2}$$

$$g(1) = 2 = A_p(\alpha e^{j\frac{\pi}{6}}) + A_d(\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}}) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A_p = -1 - A_d \Rightarrow A_p = \frac{+\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\alpha e^{j\frac{\pi}{6}} - \alpha e^{-j\frac{\pi}{6}}}, A_d = A_p = \frac{+\alpha e^{j\frac{\pi}{6}}}{\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}} - \alpha e^{j\frac{\pi}{6}}}$$

$$\Rightarrow g(n) = (A_p + A_d)(\alpha e^{j\frac{\pi}{6}})^n + (A_p + A_d)(\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}})^n + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\alpha e^{j\frac{\pi}{6}} - \alpha e^{-j\frac{\pi}{6}}} (\alpha e^{j\frac{\pi}{6}})^n + \frac{\frac{1}{2}}{\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}} - \alpha e^{j\frac{\pi}{6}}} (\alpha e^{-j\frac{\pi}{6}})^n + \frac{1}{2} \quad n \geq 0$$

روش دوم: ترکیب ورودی و شرایط اولیه

$$\begin{aligned}
 y(0) &= y(-1) + u(0) = 1 = A_1 + A_2 + 1 \Rightarrow A_1 = -A_2 \\
 y(1) &= y(0) - \beta y(-1) + u(1) = 1, \delta = A_1(ae^{j\omega}) + A_2(ae^{-j\omega}) + 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1/\delta}{ae^{j\omega} - ae^{-j\omega}}, A_2 = A_1^* \\
 y(n) &= A_1(ae^{j\omega})^n + A_2(ae^{-j\omega})^n + 1 \quad n \geq 0
 \end{aligned}$$

روش نرم

$$\begin{aligned}
 y(n) &= A_1(ae^{j\omega})^n + A_2(ae^{-j\omega})^n + 1 \\
 y(-1) &= 1 = A_1 a^{-1} e^{-j\omega} + A_2 a^{-1} e^{j\omega} + 1 \Rightarrow A_2 = \frac{-1 - A_1 a^{-1} e^{-j\omega}}{a^{-1} e^{j\omega}} \\
 y(-2) &= 0 = A_1 a^{-2} e^{-2j\omega} + A_2 a^{-2} e^{2j\omega} + 1 \\
 \Rightarrow A_1 &= \frac{-1 - A_1 a^{-1} e^{-j\omega}}{a^{-1} e^{j\omega} + a e^{-j\omega} (-e^{-2j\omega})} = \frac{a^{-1} e^{j\omega} - a e^{-j\omega}}{a^{-1} e^{j\omega} (e^{j\omega} - e^{-j\omega})} = \frac{1}{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}
 \end{aligned}$$

میدان

$$\frac{1}{e^{j\omega} - e^{-j\omega}} = \frac{1}{2j} = \frac{1/\delta}{ae^{j\omega} - ae^{-j\omega}}$$

مثال ۶: پاسخ سیستم $y(n) - 0.5y(n-1) = 2\cos(n\omega)u(n)$ تحت شرایط اولیه $y(-1)=1$ را بدست آورید.

الف: اصل شرط اولیه

$$\begin{aligned}
 y(n) - \beta y(n-1) &= 0 \\
 \lambda = \beta \Rightarrow y_1(n) &= A\beta^n \Rightarrow y_1(0) = \beta y_1(-1) = \beta = A \Rightarrow y_1(n) = \beta + \beta\delta^n u(n) \\
 y(n) - \beta y(n-1) &= 2\cos(n\omega) = e^{jn\omega} + e^{-jn\omega} \\
 y(n) - \beta y(n-1) &= e^{jn\omega} + e^{-jn\omega} \\
 \beta e^{jn\omega} - 1/\delta \beta e^{-jn\omega} &= e^{jn\omega} + e^{-jn\omega} \Rightarrow \beta = \frac{1}{1 - \beta e^{2j\omega}} = ae^{j\varphi} \\
 y_1(n) &= A(\beta)^n + \beta e^{jn\omega} + \beta e^{-jn\omega} = A(\beta)^n + 2a\cos(n\omega + \varphi) \\
 y_1(0) &= \beta \times 0 + 1 = A + 2a\cos\varphi \Rightarrow A = 1 - 2a\cos\varphi \Rightarrow y_1(n) = (1 - 2a\cos\varphi)\beta^n + 2a\cos(n\omega + \varphi) \\
 \Rightarrow y(n) &= (1 - 2a\cos\varphi)\beta^n + 2a\cos(n\omega + \varphi) \quad n \geq 0
 \end{aligned}$$

ب: اصل شرط اولیه

روش دوم: از آنجائیکه ورودی از صفر شروع می شود می توان نوشت:

$$y(0) = \beta y(-1) + 2\cos(\omega) = 1, \delta = A(\beta) + 2a\cos(\omega + \varphi) \Rightarrow A = 1/\delta - 2a\cos\varphi$$

گوشه حاصل می باشد

روش سوم: ورودی از صفر شروع می شود و در $n=-1$ غیر صفر است.

$$\begin{aligned}
 y(-1) &= A_1(\beta)^{-1} + 2a\cos(\varphi - \omega) = 1 \Rightarrow A_1 = 1/\delta - 2a\cos(\varphi - \omega) \\
 \Rightarrow y(n) &= (\beta - 2a\cos(\varphi - \omega))(\beta)^n + 2a\cos(n\omega + \varphi)
 \end{aligned}$$

به روش ذیل می توان نشان داد که $A1=A$ است.

$$\beta = \frac{1}{1 - \beta e^{2j\omega}} = ae^{j\varphi} \Rightarrow ae^{j\varphi} - \beta ae^{j\varphi} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \cos \varphi - 0.5 \alpha \cos (\varphi - \omega_0) = 1$$

$$\Rightarrow A_1 = 0.5 - \alpha \cos (\varphi - \omega_0) = 0.5 + 2 - 2 \alpha \cos \varphi = 2.5 - 2 \alpha \cos \varphi$$

$$g(n) = 2 \alpha \cos n \omega_0 + \varphi$$

نکته: بافت به پاسخ اثر کارهای درونی ضلع

خروجی سیستم با رابطه معادلات دیفرانسیل یک کسره بیان می شود. β دامنه و فاز انتقال خروجی را مشخص می کند.

$$g(n) = 0.5(1 - 0.5^n) = n \cdot 0.5^{n-1}$$

معادله $\beta = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$ است این به آن معنی است که یک واحد تاخیر محدود است.

۳-۴ تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال $x(n)$ طبق تعریف برابر است با

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

تبدیل Z سیگنال $x(n)$ وجود دارد اگر سری توانی $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ همگرا شود. بنابراین در کنار هر تبدیل Z می باید ناحیه همگرایی آن $Region of Convergence(ROC)$ بیان شود.

مثال:

$$\rightarrow x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\} \Rightarrow x_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$ROC: z \neq 0 \text{ تمام صفحه با استثنای } z=0 \text{ (برای } x_1(z) \text{ میانهایتی)}$$

$$\rightarrow x_2(n) = \delta(n) \Rightarrow x_2(z) = 1$$

$$ROC: z \text{ تمام صفحه}$$

$$\rightarrow x_3(n) = \delta(n+k) \quad k > 0 \Rightarrow x_3(z) = z^k$$

$$ROC: z \neq \infty \text{ تمام صفحه با استثنای } z=\infty$$

از مثالهای فوق بر می آید که تمام سیگنالها با طول محدود دارای ROC شامل تمام صفحه به استثنای احتمالا $z=0$ و $z=\infty$ هستند.

۱-۳-۴ ناحیه همگرایی:

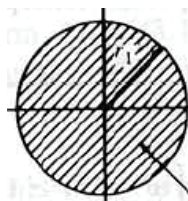
اگر Z را به صورت $re^{j\theta}$ بنویسیم آن هنگام می توان نوشت

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\theta} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-jn\theta}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty$$

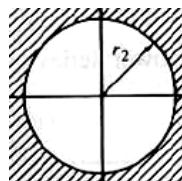
به این ترتیب موضوع پیدا کردن ناحیه همگرایی تبدیل به یافتنی محدوده ای برای r می شود که $|X(z)|$ محدود بدست می آید. اگر رابطه اخیر را توسعه دهیم اینگونه ارائه می یابد

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right|$$

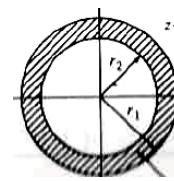
اگر جمله اول به ازای بزرگترین شعاع r_1 همگرا گردد به ازای تمام $0 < r < r_1$ نیز همگرا است و اگر جمله دوم به ازای کوچکترین شعاع r_2 همگرا گردد به ازای شعاعهای $r > r_2$ نیز همگرا است. اگر $r_2 > r_1$ باشد ناحیه همگرایی وجود ندارد و اگر $r_2 < r_1$ باشد حلقه همگرایی بدست می آید.



ناحیه همگرایی: جمله اول



ناحیه همگرایی: جمله دوم



ناحیه همگرایی: هر دو جمله
اگر $r_2 < r_1$ باشد

مثال

۱- $x_1(n) = a^n u(n) \Rightarrow X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (a z^{-1})^k$
 از اینجا به آسانی می توانیم
 $\frac{1}{1-A}$ به دست می آید، به شرط $|A| < 1$ به شرط $1 + A + A^2 + A^3 + \dots$
 $X_1(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$ ROC: $|a z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$
 نمودار در صفحه z را می بینیم

۲ $x_2(n) = -a^n u(-n-1) \Rightarrow X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n) z^{-n}$
 $\Rightarrow X_2(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{a}^{-1} z)^k = - \left(\frac{1}{1 - \bar{a}^{-1} z} - 1 \right) = \frac{-\bar{a}^{-1} z}{1 - \bar{a}^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$
 ROC: $|\bar{a}^{-1} z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$

نکته: در مثال فوق $x_1(n) = a^n u(n)$ و $x_2(n) = -a^n u(-n-1)$ هر دو تبدیل Z برابر $X_1(z) = X_2(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$ داشتند بنابراین تابع تبدیل Z بیان کننده یک سیگنال خاص نیست مگر آنکه ROC کنار تابع تبدیل آورده شود برای سیگنال $x_1(n)$ که به ازای $n \geq 0$ مقدار دارد. ROC خارج دایره به شعاع a است. و برای سیگنال $x_2(n)$ که به ازای $n < 0$ مقدار دارد ROC داخل دایره ای است که شعاع a تعیین می کند به عبارت دیگر برای تابع تبدیل Z در سیگنال یکی علی $x_1(n)$ و دیگری غیر علی $x_2(n)$ وجود داشت. برای سیگنال علی ROC به سمت خارج دایره و برای سیگنال غیر علی ROC داخل دایره است.

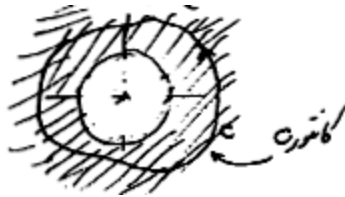
خلاصه مطالب همگرایی

- ۱- اگر سیگنال طول محدود داشته باشد ROC آن کل صفحه به استثنای احتمالا $z=0$ و $z=\infty$ است
- ۲- اگر سیگنال علی باشد ROC آن سمت خارج دایره مرز همگرایی گسترش دارد.
- ۳- اگر سیگنال غیر علی باشد ROC به سمت داخل دایره مرز همگرایی گسترش می یابد.
- ۴- اگر سیگنال مجموعه بخش علی و غیر علی باشد ممکن است نوار حلقه همگرایی بدست آید. اگر شعاع مربوط به بخش علی r_2 کوچکتر از شعاع مربوط به بخش غیر علی r_1 باشد.

FIR		IIR	
Causal 	 ROC: $z \neq 0$	Causal 	 ROC: $ z > r_2$
Anticausal 	 ROC: $z \neq \infty$	Anticausal 	 ROC: $ z < r_1$
Two-Sided 	 ROC: $z \neq 0, z \neq \infty$	Two-Sided 	 ROC: $r_2 < z < r_1$

۲-۳-۴ عکس تبدیل Z

اپراتور عکس تبدیل Z، میدان Z را به میدان زمان منتقل می کند.



$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

کانتور C در عکس جهت عقربه های ساعت در منطقه ROC بوده و مبدا را دور می زند. معمولاً تابع تبدیل Z به صورت کسری است و برای محاسبه عکس آن راههای ساختاری به جای محاسبه فرمول فوق و گرفتن انتگرال وجود دارد.

۳-۳-۴ خواص تبدیل z

ROC	تبدیل z	سیگنال	
$ROC_1: r_{12} < z < r_{11}$	$X(z)$	$x(n)$	
$ROC_2: r_{22} < z < r_{21}$	$H(z)$	$h(n)$	
$ROC_1 \cap ROC_2$ حاصل	$aX(z) + bH(z)$	$ax(n) + h(n)$	خطی بودن
	$X(a^{-1}z)$	$a^n x(n)$	ضرب در a^n
	$X(z^{-1})$	$x(-n)$	معکوس در زمان
ROC_1	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$nx(n)$	مشتق در میدان z
$ROC_1 \cap ROC_2$ حاصل	$X(z)H(z)$	$x(n) \otimes h(n)$	کانولوشن
$[ROC: x_1(z^{-1})] \cap ROC_1$ حاصل	$Rxh(z) = X(z)H(z^{-1})$	$rxh(l) = x(l) \otimes h(-l)$	همبستگی
$r_{12}r_{22} < z < r_{11}r_{21}$ حاصل	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)H(\frac{z}{v})v^{-1}dv$	$x(n)h(n)$	ضرب
$ROC_1 - \begin{cases} z=0 & k>0 \\ z=\infty & k<0 \end{cases}$	$z^k X(z)$	$x(n-k)$	شیفت زمانی
تبدیل z یک طرفه			
منحصر بفرد است و نیاز به بیان ROC ندارد	$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$	$x(n)$	تبدیل z یک طرفه
سیگنال باید علی باشد	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	$x(n)$	مقدار اولیه
$k > 0$	$z^{-k} X(z) + \sum_{m=1}^k x(-m) z^{m-k}$	$x(n-k)$	شیفت زمانی
$k < 0$	$z^k X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m) z^{k-m}$		
دایره واحد باید جزئی ROC باشد یا به عبارتی سیگنال پایدار باشد.	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	$x(n)$	مقدار نهایی

ROC	$X(z)$	$x(n)$
$z \neq 1$	1	$\delta(n)$
$ z > 1$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$u(n)$
$ z > a $	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$a^n u(n)$
$ z < 1$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$-u(n-1)$
$ z < a $	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$-a^n u(-n-1)$
$ z > a $	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^r}$	$na^n u(n)$
$ z < a $	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^r}$	$-na^n u(-n-1)$
$ z > 1$	$\frac{1-z^{-1}e^{jn\omega_0}}{1-r e^{jn\omega_0} z^{-1} + z^{-r}}$	$\ell_n(r\omega_0) u(n)$
$ z > 1$	$\frac{z^{-1} \ell_{in} \omega_0}{1-r e^{jn\omega_0} z^{-1} + z^{-r}}$	$\ell(r\omega_0) u(n)$

مثال: تبدیل Z تابع $x(n) = 3\delta(n+1) + 2\delta(n) + 6\delta(n-3) - \delta(n-4)$ را تعیین کنید.

$$X(z) = 3z + 2 + 6z^{-3} - z^{-4} \quad \text{ROC: } \{z \neq 0, z \neq \infty\}$$

مثال: تبدیل Z تابع $x(n)$ را بدست آورید.

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)} \Rightarrow X(z) = \begin{cases} N & \text{if } z=1 \\ \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} & \text{if } z \neq 1 \end{cases} \quad \text{ROC: All } z - \{z=0\}$$

مثال: تبدیل Z تابع $x(n)$ را بدست آورید.

$$x(n) = a^n \ell_{in} n\omega_0 u(n)$$

$$x(n) = a^n x_1(n) \Rightarrow x_1(n) = \frac{1}{rj} e^{jn\omega_0} - \frac{1}{rj} e^{-jn\omega_0}$$

$$Z(x_1(n)) = \frac{\frac{1}{rj}}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{\frac{1}{rj}}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}} = \frac{z^{-1} \ell_{in} \omega_0}{1-r z^{-1} e^{j\omega_0} + z^{-r}} \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

$$Z(x(n)) = X(a^{-1}z) = \frac{a z^{-1} \ell_{in} \omega_0}{1-r a z^{-1} e^{j\omega_0} + a^r z^{-r}} \quad |z| > |a|$$

مثال: اتو کوریشن $a^n u(n)$ که $-1 < a < 1$ است را بدست آورید.

$$R_{xx}(z) = X(z) X(z^{-1})$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| > |a| \quad \text{سینال علی}$$

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az} \quad \text{ROC: } |z| < \frac{1}{|a|} \quad \text{سینال زیری}$$

$$R_{xx}(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az} \quad \text{ROC: } |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

اگر چه $x(n)$ سیگنال علی فرض شد چون ROC مربوط به $R_{xx}(z)$ حلقه است، $r_{xx}(l)$ سیگنال دو طرفه است. مثال: تبدیل Z یک طرفه سیگنال $a^n u(n)$ را بدست آورید. نیازی به نوشتن ROC نیست.

$$x^+(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

مثال تبدیل Z یک طرفه

$$x^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

۴-۳-۴ تبدیل Z سیستم LTI

خروجی یک سیستم LTI با تابع ضربه $h(n)$ به ورودی $x(n)$ برابر است با $y(n) = x(n) \otimes h(n)$. اگر تبدیل Z توابع $h(n)$ و $x(n)$ موجود باشد، $Y(z) = H(z)X(z)$ می گردد.

نسبت بین تبدیل Z خروجی به ورودی تابع تبدیل سیستم است که همان تبدیل Z تابع ضربه آن است.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

سیستمی که با معادله تفاضلی

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

نمایش داده می شود، تابع تبدیل Z آن اینگونه بدست می آید.

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

به ریشه های مخرج قطبهای سیستم و به ریشه های صورت صفرهای سیستم می گویند. اگر $a_k = 0$ باشد سیستمی با تابع تبدیل

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

بدست می آید. این سیستم واضح است که تابع ضربه با طول محدود دارد که به آن FIR گفته می شود این سیستم دارای M صفر است لذا به آن سیستم تمام صفر نیز گفته می شود.

از طرفی اگر به استثنای b_0 بقیه b_k ها صفر باشند، سیستمی با تابع تبدیل

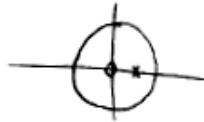
$$H(z) = \frac{b_0 z^{-N}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

بدست می آید که دارای N قطب است و N صفر تکراری در مبدا دارد. به این سیستم، سیستم تمام قطب می گویند و از آنجا که تابع ضربه آن نامحدود است به آن سیستم IIR گفته می شود.

مثال: تابع تبدیل Z و پاسخ ضربه واحد سیستم داده شده را بدست آورید.

$$y(n) = \frac{1}{r} y(n-1) + 2x(n)$$

$$Y(z) = \frac{1}{r} z^{-1} Y(z) + 2X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{r} z^{-1}} = \frac{2z}{z - \frac{1}{r}}$$



این سیستم منفی رویداد و قطب در $z = \frac{1}{r}$ دارد.

$$h[n] = 2 \times \left(\frac{1}{r}\right)^n$$

تابع ضرب این سیستم از جدول برابر است با

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

مثال: قطب و صفرها را بساز

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n$$

این سیستم طول محدود را در این سیستم FIR نام می‌گذارند.

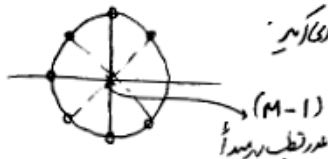
$$= \frac{1 - (az^{-1})^M}{1 - az^{-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z - a)}$$

$$z = a = a e^{j2\pi k/M} \Rightarrow z_k = a e^{j2\pi k/M} \quad k=0, \dots, M-1$$

صفرها برابرند با

این صفرها روی دایره شعاع a و با زاویه $\frac{2\pi n}{M}$ قرار دارند. برای $k=0$ مقدار صفر

$z=0$ قطب را حذف کرده و در $M-1$ قطب تکراری رویداد (پول) می‌ماند.



۵-۳-۴ محاسبه عکس تبدیل Z

برای محاسبه عکس تبدیل Z سه راه حل وجود دارد.

۱- محاسبه مستقیم از عکس تبدیل z

۲- بسط $X(z)$ به سری ها

۳- بسط به کسرها جزیی

۴- با استفاده از MATLAB

روش اول: به ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرد و کاربردها روشهای ۲ و ۳ عمومی تر است.

روش دوم: بسط $X(z)$ به سری ها: در این روش با توجه به RDC مربوطه $X(z)$ بصورت سری توانی بسط داده می‌شود که در

منطقه ROC همگرا باشد و سپس تابع زمانی بدست می‌آید.

$$\text{مثال: تابع تبدیل } X(z) = \frac{1}{1 - 1/5 z^{-1} + 0/5 z^{-2}} \text{ داده شده است } x(n) \text{ را تحت شرایط}$$

(a) ROC: $|z| > 1$ سیگنال علی

(b) ROC: $|z| < 0.5$ سیگنال غیر علی بدست آورید.

(a) چون سیگنال علی است، سری توانی با توانهای منفی از طریق تقسیم صورت به مخرج کسر بدست می‌آوریم

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \dots$$

که مقدار $x(n)$ برابر است با: $\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots\right\}$

(b) در این حال سیگنال غیر علی است لذا جواب باید سری با توانهای مثبت باشد بنابراین ابتدا چند جمله ای صورت و مخرج را باید

به صورت توان صعودی z نوشته سپس تقسیم را انجام می دهیم.

$$X(Z) = \frac{1}{\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1} = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \dots$$

در این حالت برای $n \geq 0$ مقدار $x(n) = 0$ است.

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2, & n = 0 \\ 6, & n = 1 \\ 14, & n = 2 \\ 30, & n = 3 \\ 62, & n = 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

روش دوم: بسط به کسرهای جزئی

حالت اول: درجه صورت بزرگتر از مخرج: صورت را به مخرج تقسیم تا یک دنباله و یک تابع کسری بدست آید که درجه صورت از مخرج کمتر باشد.

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \quad \text{مثال:}$$

حالت دوم: درجه صورت کوچکتر از مخرج و قطبها غیر تکراری هستند: در این حالت $X(Z)$ را می توان اینگونه بسط داد.

$$\frac{X(Z)}{Z} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{z - p_i}$$

در این رابطه N تعداد قطبها است و ضرایب A_i از رابطه ذیل بدست می آید

$$A_i = \left. \frac{(z - p_i)X(z)}{z} \right|_{z=p_i}$$

مثال

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5}$$

$$A_1 = \left. \frac{(z-1)X(z)}{z} \right|_{z=1} = \frac{1}{0.5} = 2, \quad A_2 = \left. \frac{(z-0.5)X(z)}{z} \right|_{z=0.5} = \frac{0.5}{0.5-1} = -1$$

$$\frac{X(Z)}{Z} = \sum_{h=1}^l \frac{A_h}{(z-p)^{h+1-1}}$$

حالت سوم: l قطب تکراری: در این حال بسط $X(Z)$ را اینگونه باید نوشت

که در آن

$$A_1 = (z-p)^{l-1} \left. \frac{X(z)}{z} \right|_{z=p}, \dots, A_l = \frac{1}{(l-1)!} \left. \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} \left[\frac{(z-1)^l X(z)}{z} \right] \right|_{z=p}$$

می باشد. بعد از تجزیه کسرها به جملات $\frac{1}{z-p_k}$ که در نهایت برای $X(z)$ بصورت $\frac{1}{1-p_k z^{-1}}$ بدست می آیند. عکس تبدیل Z گرفته

می شود که نتیجه می دهد.

$$Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-p_k z^{-1}} \right\} = \begin{cases} (p_k)^n u(n), & \text{ROC: } |z| > |p_k| \\ -(p_k)^n u(-n-1), & \text{ROC: } |z| < |p_k| \end{cases}$$

حالت چهارم: در صورتیکه ریشه های کمپلکس داشته باشیم ضرایب نیز به صورت کمپلکس در می آیند و عکس تبدیل Z آنرا

آمبریز توان زشت

$$Z^{-1} \left[\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}} + \frac{A_k^*}{1-p_k^* z^{-1}} \right] = 2|A_k| r_k^n \cos(A_k n + \phi_k) u(n)$$

که در آن $A_k = |A_k| e^{j\phi_k}$ و $p_k = r_k e^{j\theta_k}$ قطب شد است. $r_k < 1$ است.

مثال:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

a) ROC: $|z| > 1$ b) ROC: $|z| < 0.5$ c) ROC: $0.5 < |z| < 1$

$$X(z) = \frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-0.5z^{-1}} = \frac{2}{1-z^{-1}} + \frac{-1}{1-0.5z^{-1}}$$

(a) ROC: $|z| > 1$ هر دو قسمت باید سیگنال علی باشند.

$$x(n) = 2(1)^n u(n) - (0.5)^n u(n)$$

(b) ROC: $|z| < 0.5$ هر دو قسمت باید سیگنال غیر علی باشند

$$x(n) = -2(1)^n u(-n-1) - [-(0.5)^n u(-n-1)]$$

(c) ROC: $0.5 < |z| < 1$ بخش دارای قطب ۰/۵ علی و بخش دارای قطب ۱ غیر علی است پس

$$x(n) = -2(1)^n u(-n-1) - (0.5)^n u(n)$$

مثال: سیگنال علی $x(n)$ تبدیل Z مقابل را دارد. آنرا بدست آورید

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

$$\Rightarrow z^2 - z + 0.5 = 0 \Rightarrow p_1, p_2 = 0.5 \pm j0.5 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{A_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1-p_2 z^{-1}} \Rightarrow A_1 = A_2^* = \frac{1}{2} - j\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow x(n) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \cos\left[\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right] u(n)$$

مثال: مقدار نهائی پاسخ سیستم علی $\frac{1}{1-az^{-1}}$ به پله را تعیین کنید.

$$y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow y_n = h(z=1) y(z) \cdot \frac{1}{1-a}$$

روش چهارم: با MATLAB و دستور $y = \text{filter}(p, d, x)$ پاسخ زمانی بدست می آید. x ورودی و p و d ضرایب تابع تبدیل و y خروجی است.

۶-۳-۴ تجزیه تابع تبدیل

تابع تبدیل $H(z)$ را در نظر بگیرید که ممکن است درجه صورت M از درجه مخرج N بزرگتر باشد

$$H(z) = \frac{\sum_{k=1}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

کسر مذکور را می توان اینگونه تجزیه کرد.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{k_1} \frac{b_k}{1 + a_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{k_2} \frac{b_k z^{-1} + b_{k+1} z^{-2} + \dots + b_{k+k_2} z^{-k_2}}{1 + a_{k_1} z^{-1} + a_{k_1+1} z^{-2} + \dots + a_{k_1+k_2} z^{-k_2}} + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k}{(1 + a_k z^{-1})^k}$$

که در آن k_1 قطب ساده، k_2 جفت قطب کمپلکس و یک قطب ساده با تکرار l است.

نحوه دیگر تجزیه کسر می تواند اینگونه باشد

$$X(z) = b_0 \prod_{k=1}^{k_1} \frac{(1 + b_k z^{-1})}{(1 + a_k z^{-1})} \prod_{k=1}^{k_2} \frac{1 + b_{k_1} z^{-1} + b_{k_1+1} z^{-2} + \dots + b_{k_1+k_2} z^{-k_2}}{1 + a_{k_1} z^{-1} + a_{k_1+1} z^{-2} + \dots + a_{k_1+k_2} z^{-k_2}}$$

۷-۳-۴ سیستم علی و سیستم پایدار

سیستم $H(z)$ علی است اگر برای $n < 0$ مقدار $h(n) = 0$ باشد به عبارت دیگر $H(z)$ وقتی علی است که ROC آن خارج دایره مرز همگرایی را در بر بگیرد.

در تعریف پایداری $BIBO$ گفته شد که برای پایداری باید

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

باشد شرطی که تحقق این امر بر $H(z)$ اعمال می کند اینگونه بدست می آید

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n} \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| |z^{-n}|$$

اگر رابطه را برای $|z| = 1$ بنویسیم بدست می آید

$$H(z) \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|$$

فرمول اخیر به این معنی است که اگر سیستم پایدار باشد دایره $|z| = 1$ جزء ROC است عکس این قضیه نیز صحیح است
اگر سیستم غیر علی باشد شرط پایداری بصورت $|z| < 1$ و اگر سیستم غیر علی باشد $|z| > 1$ در می آید که در حالت اخیر به این معنی است که برای پایداری، تمام قطبهای $H(z)$ باید داخل دایره واحد قرار گیرند

۸-۳-۴ آزمون پایداری شور - کوهن Shur-Cohn

چند جمله ای مخرج تابع تبدیل که به نام معادله مشخصه خوانده می شود را در نظر بگیرید هدف این است که موقعیت ریشه های معادله مشخصه در صفحه z تعیین شود که آیا داخل دایره واحد (سیستم پایدار) یا خارج دایره واحد (سیستم ناپایدار) قرار دارد دستور العمل ذیل پارامترهای K_i تولید می کند که شرط پایداری سیستم $i = 1, \dots, N$ $|K_i| < 1$ است.
برای تعیین پایداری سیستم

$$H(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \Rightarrow p(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}$$

را در نظر گرفته جدول ذیل را مطابق دستور العمل حاشیه جدول تشکیل داده و پایداری سیستم را بدون نیاز به محاسبه ریشه ها کنترل کند.

$P(z) \Rightarrow$	A_N	1	a_1	\dots	a_{N-1}	a	$K_N = a_N$
	A'_N	a_N	a_{N-1}	\dots	a_1	1	
$A_{N-1} = \frac{A_N - K_N A'_N}{1 - K_N^2}$	A_{N-1}	1	b_1	\dots	b_{N-1}	0	$K_{N-1} = b_{N-1}$
	A'_{N-1}	b_{N-1}	b_{N-2}	\dots	1	0	
$A_{N-2} = \frac{A_{N-1} - K_{N-1} A'_{N-1}}{1 - K_{N-1}^2}$	A_{N-2}	1	c_1	\dots	c_{N-2}	0	$K_{N-2} = c_{N-2}$
	A'_{N-2}	c_{N-2}	c_{N-3}	\dots	1	0	
	A_1	1	x_1	\dots			$K_1 = x_1$
	A'_1	x_1	1	\dots			

ریشه های $p(z)$ و به تبع آن قطبهای $H(z)$ داخل دایره واحد قرار دارند اگر $|K_i| < 1$ $i=1, \dots, N$ باشد.

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2} + 0.05z^{-3}}$$

بحث کنید.

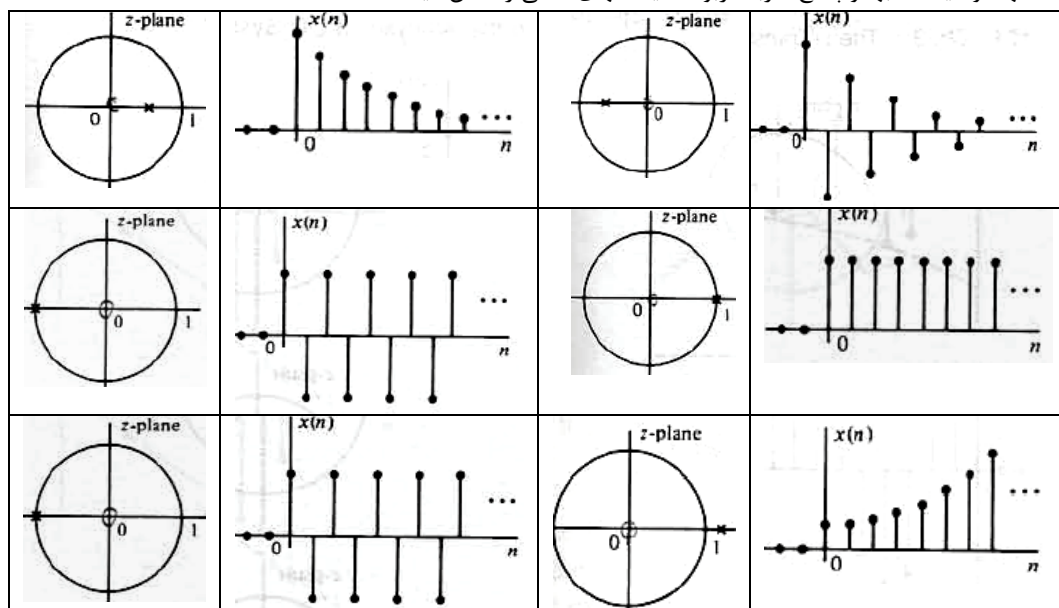
مثال: در پایداری سیستم

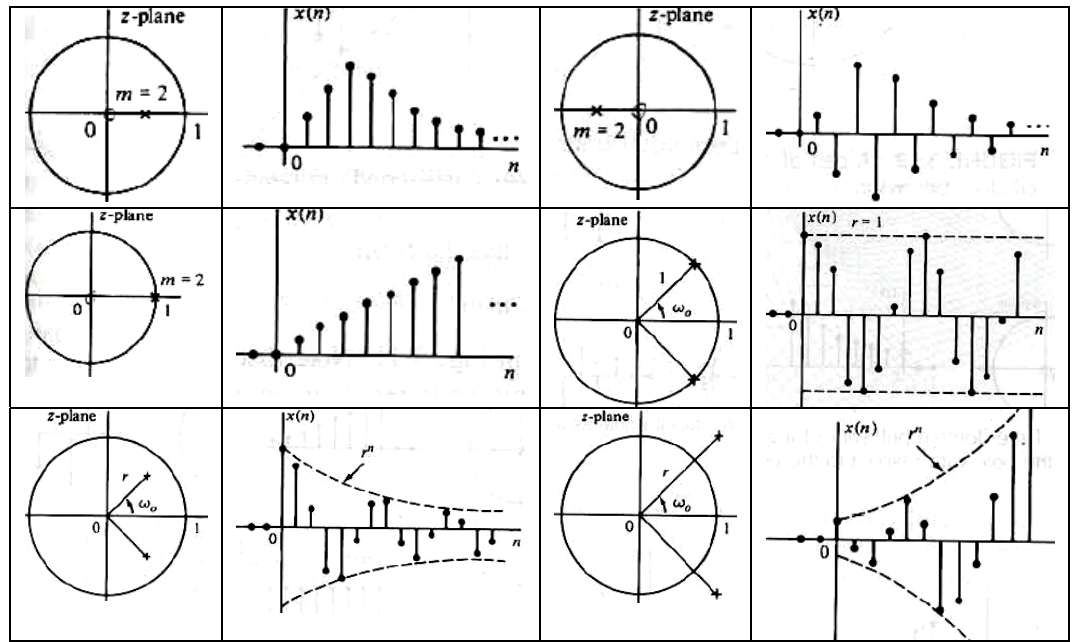
A_3	1	0.2	0.1	0.5	$K_3 = 0.5$
A'_3	a_N	a_{N-1}	a_1	1	
A_2	1	0.2	0	0	$K_2 = 0$
A'_2	0	0.2	1		
A_1	1	0.2	0	0	$K_1 = 0.2$
A'_1	0.2	1			

چون قدر مطلق $|K_3|$ و $|K_2|$ و $|K_1|$ کوچکتر از ۱ است $H(z)$ پایدار است یعنی قطبها داخل دایره واحد قرار دارند.

۹-۳-۴ موقعیت قطبها و رفتار سیستم

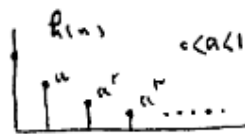
شکلها موقعیت قطبها و پاسخ ضربه مربوط سیستمهای خطی را نشان میدهند.





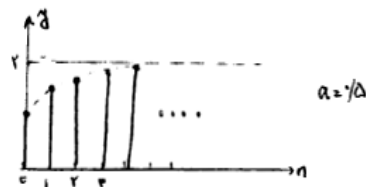
(۱) رفتار سیستم درجه ۱:

سیستم درجه ۱ پایدار علی $0 < a < 1$ را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه این سیستم اینگونه محاسبه میشود.



$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Rightarrow h(n) = a^n x(n)$$

پاسخ پله این سیستم برابر است با



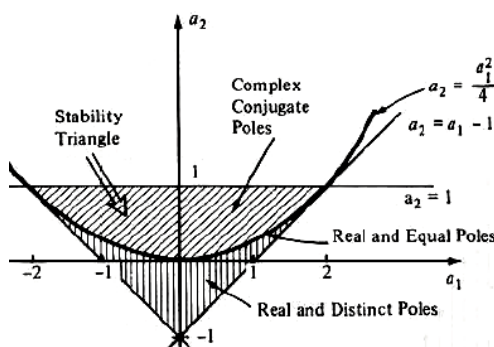
$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{-a/(1-a) + 1/(1-a)}{1 - az^{-1} - z^{-1}} \Rightarrow y(n) = \frac{1}{1-a}(1 - a^{n+1})$$

(۲) بخش رفتار سیستم درجه ۲

سیستم درجه ۲

$$y(n) = -\alpha_1 y(n-1) - \alpha_2 y(n-2) + b \cdot x(n) \Rightarrow H(z) = \frac{b}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}$$

را در نظر بگیرید. قطبهای این سیستم



$$p_1, p_2 = -\frac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}{4}}$$

می باشند. برای اینکه این سیستم پایدار باشد قطبهای آن باید داخل دایره واحد قرار گیرند. برای بررسی پایداری سیستم درجه ۲، مثلث پایداری وجود دارد که می توان پایداری را از روی ضرایب تشخیص داد. اگر پارامترهای $a1$ و $a2$ نقطه ای داخل مثلث را نشان دهند سیستم پایدار و در غیر اینصورت ناپایدار است.

$$\hookrightarrow y(-1)z^1 + y(-1)z + x(n) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{X(z) + [0.9 - 0.81 - 0.81z^{-1}]}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} = \frac{X(z) + [0.09 - 0.81z^{-1}]}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2})} + \frac{0.09 - 0.81z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} =$$

$$= \frac{1.049}{1-z^{-1}} + \frac{0.528 + j0.444}{1 - 0.9e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1}} + \frac{0.528 - j0.444}{1 - 0.9e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1}} \Rightarrow$$

$$y(n) = 1.049u(n) + 1.44(0.9)^n \cos(n\frac{\pi}{8} + 38^\circ)u(n)$$

۴-۴ مدل فضای حالت

نوع دیگر مدل ریاضی سیستم گسسته مدل فضای حالت است. معادله دیفرنس

$$y(n) = -\sum_{i=1}^N a_i y(n-i) + \sum_{j=1}^M b_j x(n-j)$$

را بصورت تابع تبدیل

$$H(z) = \frac{\sum_{j=1}^{M-1} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

می توان نوشت. در این رابطه شرایط اولیه و b_0 صفر در نظر گرفته شده است. این تابع تبدیل را بصورت ذیل می توان بسط داد

$$H(z) = b_1 z^{-1} H_1(z) + b_2 z^{-2} H_2(z) + \dots$$

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{Y_1(z)}{R(z)}$$

$$y_1(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y_1(n-k) + R(n)$$

با تغییر متغیر زیر یک دسته معادلات دیفرنس درجه ۱ متیجه می شود که می توان بصورت برداری آنها را نوشت.

$$y_1(n) = -\underbrace{a_1 y_1(n-1)}_{x_N(n)} - \underbrace{a_2 y_1(n-2)}_{x_{N-1}(n)} - \dots - \underbrace{a_N y_1(n-N)}_{x_1(n)} + R(n)$$

$$x_1(n+1) = x_N(n)$$

$$x_2(n+1) = x_1(n)$$

$$x_N(n+1) = x_N(n)$$

$$y_1(n) = x_N(n+1) = -a_1 x_N(n) - a_2 x_{N-1}(n) - \dots - a_N x_1(n) + R(n)$$

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N & \dots & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} R(n)$$

$$X(n+1) = A X(n) + B R(n)$$

از طرف دیگر داشتیم

$$\frac{Y_1(z)}{R(z)} = H_1(z) \Rightarrow H(z) = b_1 z^{-1} H_1(z) + \dots$$

$$Y(z) = \dots + b_1 z^{-1} Y_1(z) + \dots \Rightarrow y(n) = \dots + b_1 y_1(n-1) + \dots$$

$$y(n) = b_1 y_1(n-1) + b_2 y_1(n-2) + \dots + b_M y_1(n-M)$$

$$= y_1(n-1) = x_N(n)$$

انتهای

لذا می نویسیم

$$\textcircled{2} \quad y(n) = [0 \ 0 \ \dots \ b_M \ b_{M-1} \ \dots \ b_1] x(n) \\ y(n) = C x(n)$$

از این معادلات به دو معادله برداری می رسیم

$$\begin{cases} x(n+1) = A x(n) + B R(n) \\ y(n) = C x(n) \end{cases}$$

به این معادلات معادلات فضای حالت گسسته گفته می شود.

برای یک معادله تفاضلی گونه های مختلفی از معادلات فضای حالت می توان نوشت که ساختار داخلی متفاوت ولی از نظر ورودی خروجی معادلند. ساختاری که در بالا بدست آمد به نوع ۲ مستقیم *Direct II* شناخته می شود.

در مدل دیگر به روش ذیل عمل می گردد.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = b_0 + \frac{\sum_{k=1}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

در اینجا نحوه تعریف متغیرهای حالت متفاوت است.

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) \dots [-a_N y(n-N) + \dots + b_M R(n-M) + \dots + b_1 R(n-1)]$$

$$\Rightarrow y(z) = z^{-1} [-a_1 y(z) + b_1 R(z)] + z^{-1} [-a_2 y(z) + b_2 R(z)] + \dots + z^{-1} [-a_N y(z) + b_N R(z)]$$

$\underbrace{\quad}_{x_1(z)} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{x_2(z)} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{x_N(z)}$

$$\Rightarrow x_1(n) = y(n)$$

$$x_1(n+1) = -a_1 x_1(n) + b_1 R(n) + x_2(n)$$

$$x_2(n+1) = -a_2 x_1(n) + b_2 R(n) + x_3(n)$$

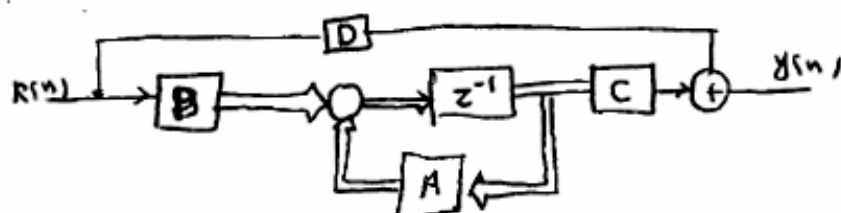
$$x_M(n+1) = -a_M x_1(n) + b_M R(n) + x_{M+1}(n)$$

$$x_N(n+1) = -a_N x_1(n) +$$

حال معادلات حالت اینگونه بدست می آیند.

$$X(n+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_M & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} X(n) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} R(n)$$

$$y(n) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x(n)$$



۱-۴-۴ تغییر متغیرهای حالت در یک سیستم

ماتریس دلخواه N^*N معکوس پذیر P را در نظر بگیرید، به نحویکه متغیرهای جدید و قدیم حالت را بهم ارتباط دهد.

$$\hat{x}(n) = Px(n) \Rightarrow x(n) = P^{-1} \hat{x}(n)$$

معادلات فضای حالت برابر بودند با

$$x(n+1) = Ax(n) + BR(n)$$

$$y(n) = Cx(n) + DR(n)$$

از ضرب طرفین معادله در P بدست می آید.

$$P x(n+1) = P A x(n) + P B R(n) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = PAP^{-1} \hat{x}(n) + P B R(n) \\ = \hat{A} \hat{x}(n) + \hat{B} R(n)$$

$$y(n) = C P \hat{x}(n) + D R(n) = \hat{C} \hat{x}(n) + D R(n)$$

هر دو مدل از دید دینامیکی خردی برابرند و از نظر حالتی فضای سیستم همسایه هستند. تفاوتی در حالتی ندارند. برای ترسیم برای یک سیستم معادلاتی حالت می توان نوشت. یکی از انواع مدل فضای حالت سیستم مدل است که در آن ماتریس A قطری است این مدل در بخش های بعدی توضیح داده می شود.

$$x(n+1) = A x(n) + B R(n)$$

$$y(n) = C x(n) + D R(n)$$

$$Z X(z) = A X(z) + B R(z)$$

$$Y(z) = C X(z) + D R(z)$$

$$(ZI - A) X(z) = B R(z) \Rightarrow$$

مدل اختیاری فضای حالت

دارای یک تبدیل Z کامل می باشد

روابط اخیر برای تمامی سیستمها دار

۲-۴-۴ تحلیل مدل فضای حالت در میدان Z

مدل فضای حالت و تبدیل Z آنرا در نظر بگیرید.

$$x(n+1) = A x(n) + B R(n)$$

$$y(n) = C x(n) + D R(n)$$

$$Z X(z) = A X(z) + B R(z)$$

$$Y(z) = C X(z) + D R(z)$$

روابط اخیر را می توان اینگونه ادامه داد.

$$(ZI - A) X(z) = B R(z) \Rightarrow Y(z) = [C (ZI - A)^{-1} B + D] R(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = C (ZI - A)^{-1} B + D$$

که تابع تبدیل سیستم بدست می آید. $H(z)$ تابع کسری است که مخرج آن را درترمینان $(ZI - A)$ می سازد. بنابراین ریشه های درترمینان $(ZI - A)$ قطبهای سیستم، و چند جمله ای درترمینان همان معادله مشخصه است. با این حساب می توان گفت که سیستم پایدار سیستمی است که در آن ریشه های درترمینان $ZI - A$ داخل دایره واحد قرار گیرند. این ریشه ها برابر مقادیر ویژه ماتریس A که از درترمینان $\lambda I - A$ بدست می آیند می باشند.

اگر سیستم دارای شرایط اولیه $X(0)$ باشد، تبدیل Z آن برای سیستم علی اینگونه نوشته می شود.

$$Z X(z) - Z X(0) = A X(z) + B R(z) \Rightarrow (ZI - A) X(z) = Z X(0) + B R(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = C (ZI - A)^{-1} Z X(0) + [C (ZI - A)^{-1} B + D] R(z)$$

۳-۴-۴ حل معادلات فضای حالت گسسته

حل این معادلات کما بیش مشابه حل معادلات تفاضلی است که از روش عکس تبدیل z نیز می توان استفاده نمود..

مثال: معادله فضای حالت، تابع تبدیل z را به پایداری سیستم $x(n)$ تبدیل می نماید.
 $g(n) = 3g(n-1) - 2g(n-2) + x(n)$

$$\lambda - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

(a) معادله فضای حالت

$$h(n) = \alpha_1 (1)^n + \alpha_2 (2)^n \quad n \geq 0$$

پس از ضرب

$$\begin{cases} g(0) = 3g(0-1) - 2g(0-2) + \delta(0) = 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ g(1) = 3g(0) - 2g(-1) + \delta(1) = 3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

$$h(n) = 1 - 2^n \quad n \geq 0$$

ریشه ها خارج دایره واحد و سیستم ناپایدار است.

$$H(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{A_1}{(1 - z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - 2z^{-1})} = \frac{-1}{1 - z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}} \quad (b)$$

$$\Rightarrow h(n) = -1 + 2^n \quad n \geq 0$$

$$z_1 = 1, z_2 = 2$$

سیستم ناپایدار

(c)

$$y(n) = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right]^T H(z) = 1 + \frac{z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$v(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} v(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [-2 \quad 3] v(n) + 1x(n)$$

$$zI - A = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(zI - A) = z(z-3) + 2 = z^2 - 3z + 2$$

$$\Rightarrow z = -1, -2$$

$$H(z) = [C(zI - A)^{-1}B + d] = [-2 \quad 3] \frac{\begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}}{z^2 - 3z + 2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

$$= \frac{[-2z + 3 - (-4)] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{z^2 - 3z + 2} + 1 = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

که در قسمت B حل رفتار زمانی آن بدست آمد.

مثال ۱: تبدیل دفرانس

مثال ۱: تبدیل z برای سیگنال $x(n) = [4(2)^n - 4(2)^n]u(n)$ به دست آورید.

$$[X(z) = \frac{4}{1-2z^{-1}} - \frac{4}{1-2z^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| > 2]$$

مثال ۲: تبدیل $x(n) = \cos(n\omega_0)u(n)$ به دست آورید.

$$x(n) = \frac{1}{2} e^{jn\omega_0} u(n) + \frac{1}{2} e^{-jn\omega_0} u(n)$$

$$= \frac{1/2}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1/2}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}} = \frac{1-z^{-1}e^{j\omega_0}}{1-2z^{-1}e^{j\omega_0}+z^{-2}} \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

مثال ۳: تبدیل z سیگنال $x(n) = u(-n)$ را بدست آورید.

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1 \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(-n)\} = X(z^{-1}) \Rightarrow \mathcal{Z}\{u(-n)\} = U(z^{-1})$$

$$\Rightarrow x(n) = u(-n) \Rightarrow X(z) = U(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}} \Big|_{z=z^{-1}} = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1$$

مثال ۵: خطی بودن، استقلال از زمان، درناپذیری، سیمتری و غیره را مشخص کنید.

- a) $y(n) = x(n) + x(n-1)$ b) $x(n]$ c) $x(-n)$ d) $x(n^2)$
e) $x^2(n)$ f) $ax(n) + b$ g) $y(n) = y(n-1) + 2x(n+6)$ h) $x(n) \cos n\omega$

- [(a) خطی، مستقل از زمان، درناپذیر، سیمتری، غیر قابل تغییر از زمان، درناپذیر
(b) خطی، مستقل از زمان، درناپذیر، سیمتری، غیر قابل تغییر از زمان، درناپذیر
(c) خطی، مستقل از زمان، درناپذیر، سیمتری، غیر قابل تغییر از زمان، درناپذیر
(d) خطی، مستقل از زمان، درناپذیر، سیمتری، غیر قابل تغییر از زمان، درناپذیر
(e) خطی، مستقل از زمان، درناپذیر، سیمتری، غیر قابل تغییر از زمان، درناپذیر
(f) خطی، مستقل از زمان، درناپذیر، سیمتری، غیر قابل تغییر از زمان، درناپذیر
(g) خطی، مستقل از زمان، درناپذیر، سیمتری، غیر قابل تغییر از زمان، درناپذیر
(h) خطی، مستقل از زمان، درناپذیر، سیمتری، غیر قابل تغییر از زمان، درناپذیر]

(۶) با توجه به رابطه معادله دیفرانسیل در زیر، معادله دیفرانسیل را به دست آورید.

$$[\dot{x}(n) + 0.5x(n-1) + 0.1x(n-2) = 0.5x(n-1) + 0.1x(n-2) \quad , \quad \dot{x}(n) = -0.5x(n-1) + 0.1x(n-2)]$$

(۷) معادله های $\{1, 2, 1, \frac{4}{3}, 1\}$ و $\{1, \frac{4}{3}, 2, 1, 1\}$ را با هم جمع کنید تا معادله ای برای $z + 2 + 2z^{-1}$ به دست آورید.

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 4 + z^{-1}$$

1	2	1	4	1					
			1	4	2				
	2	4	2	8	2				
	3	6	3	12	4				
1	2	1	4	1					
1	5	9	11	15	11	2			

$$\{1, 5, 9, 11, 15, 11, 2\}$$

تعداد اعداد در هر یک از سطرها را در نظر بگیرید و به دست آورید.

۸- تبدیل z و ناحیه همگرایی برای سیگنالهای ذیل را بدست آورید.

$a) \{1, 1, \Delta, \nabla, 0, 1\}$ $b) n^2 u(n)$ $c) \alpha^n \cos(n\omega) u(n)$ $d) (0.25)^n u(n) - \varepsilon(e)^n u(n-1)$
 $a) x(z) = z^2 + z + 0.5 + 0.25z^{-1} + z^{-2}$ $\text{ROC: all } z - \{z=0, \infty\}$ $b) \frac{z^2 + z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ $c) \frac{1/z}{1 - \alpha e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1/z}{1 - (\alpha e^{j\omega_0})^* z^{-1}}$ $\text{ROC: } |z| > |\alpha|$ $d) \frac{1}{1 - 0.25z^{-1}} + \frac{z}{1 - 0.25z^{-1}}$ $3) |z| > 0.5$
 ۹) تابع تبدیل $x(z) = \frac{5z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$ را در زیر تبدیل کنید.

$\text{ROC: } |z| > 2 \Rightarrow z^n u(n) - (\frac{1}{2})^n u(n)$, $\text{ROC: } |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow -z^n u(-n-1) + (\frac{1}{2})^n u(-n-1)$
 $\text{ROC: } \frac{1}{2} < |z| < 2 \Rightarrow -z^n u(-n-1) - (\frac{1}{2})^n u(n)$
 ۱۰) آیا تابع تبدیل $x(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$ proper است؟ در صورتی که شرط $x(n)$ می باشد
 بهت آورید. آیا این سیستم پایدار است.

۱۱) بدست آورید. آیا این سیستم پایدار است.
 $x(n) = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$
 در صورتی که $x(n) = \{0, 2, 5, 8, 11, \dots\}$ باشد.
 ۱- مقدار اولیه و نهایی سیگنالهای ذیل را بدست آورید.

$a) x(z) = \frac{1}{1-z^{-1}+z^{-2}}$ $b) x(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$
 $a) x(0)=1, x(\infty)=\infty$ $b) x(0)=1, x(\infty)=4$
 [فرمول مسکو ویدر برای تبدیل و معادلات برای تبدیل پایدار من می دهد.]

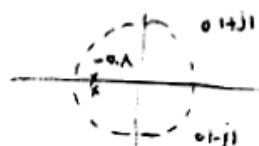
۱۲) از طریق تبدیل z به سطح سیستم $x(n) = 2x(n-1) + 0.1g(n-2) + 0.7g(n-1) + g(n)$ به صورتی که $x(n) = 2x(n-1) + 0.1g(n-2) + 0.7g(n-1) + g(n)$ باشد.
 $g(-2)=2, g(-1)=1$ بهت آورید.

$[0.1 \varepsilon^4(-0.12) + 0.5 \varepsilon^4(-0.5) + 0.4 \varepsilon^4(2)]$
 ۱۳) تبدیل $\alpha^n u(n)$ را از طریق تبدیل z بهت آورید.

$R_{xx}(z) = X(z) X(z^{-1}) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \cdot \frac{-\alpha^{-1} z^{-1}}{1-\alpha^{-1} z^{-1}} = \frac{1}{1-\alpha^2} - \frac{1}{1-\alpha^{-1} z^{-1}}$
 $\Rightarrow r_{xx}(l) = \frac{1}{1-\alpha^2} (\alpha^l u(l) + \alpha^l u(-l-1)) = \frac{1}{1-\alpha^2} \alpha^l$
 ۱۴) شرط K برای پایداری $x(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}+0.7z^{-2}+0.3z^{-3}}$ را بدست آورید.

$[\frac{-1.8}{0.3} < K < 0.7]$

۱۴- موقعیت صفرها و قطبهای سیستمی با بهره واحد در شکل نشان داده شده است، تابع تبدیل آنرا بدست آورید. آیا این سیستم پایدار است؟



$[\frac{1.8}{1} \times \frac{(1-(0.4+jz)z^{-1})(1-(0.4-jz)z^{-1})}{(1+0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}]$

(۱۵) برای سیستم $y(n) + 0.7y(n-1) + 0.1y(n-2) = 2x(n)$ شکل فضای حالت بنویسید.

$$\begin{bmatrix} y(n) = [-0.2 \quad -1.4]x(n) + 2x(n), \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.7 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}R(n) \end{bmatrix}$$

(۱۶) سیستم فضای حالت $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$ رابطه حالت این سیستم برای چه تدرار K باطراست.

$[K, 0.5]$

(۱۷) هاستانگشت باطراست K برای باطراست سیستم $\frac{1}{1+Kz^{-1}-0.5z^{-2}}$ ثابت آورید.

$$[K, 0.5]$$

(۱۸) تابع تبدیل سیستم M باطراست $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.2 & -0.3 \\ -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$ ، $y = [0 \quad 1 \quad 0]x$ شکل

رابطه حالت باطراست آورید.

$$\left[\frac{z^{-2}}{1+0.3z^{-1}+0.2z^{-2}+0.5z^{-3}} \right]$$